



Tanıtım

Tema: Nicelikler ve Değişimler

Konu: $f(x) = a^x$ Üstel Referans Fonksiyonunun Özellikleri ile $y = k f(mx \pm r) \pm s$ Fonksiyonlarının Nitel Özelliklerine İlişkin Muhakeme YapabilmeAlt Konu: a^x Üstel Referans Fonksiyonunun ÖzellikleriTemanın Amacı: $f(x) = a^x$ Üstel Referans Fonksiyonunun Temel Özelliklerini Anlamak

Anahtar Kavramlar: Üstel Fonksiyon, Öteleme, Artan ve Azalan Fonksiyon

Köprü Kurma

Hiç fark ettiniz mi? Hayattaki bazı değişimler bir anda hızlanır, bazılarıysa yavaş yavaş etkisini kaybeder. Bir bitkinin kısa sürede serpiildiğini, bir hastalığın birkaç günde tüm okula yayıldığını, ya da kahvenizin birkaç dakika içinde ılıdığını mutlaka gözlemlemişsinizdir. İşte bu olayların arkasında yatan matematiksel yapı, üstel fonksiyonlardır. Doğadaki birçok süreç “her adımda aynı miktarda” değil, “her adımda aynı oranda” değişir. Yani bir oran her seferinde %20 artıyorsa veya %10 azalıyorsa, bu değişim doğrusal değil, üstel bir değişimdir. Bu fark küçük görünse de zaman geçtikçe sonuçlar çarpıcı hale gelir.

Doğadaki Büyüme: Bir bakterinin bölünerek çoğalmasını düşünün. Başta yalnızca bir tanedir ama her yarım saatte ikiye bölünür. Bir saat sonra 4, iki saat sonra 16, birkaç gün içinde milyonlar olur. Bu, doğanın “katlanarak artma” yasasıdır. Üstel fonksiyonlar bu artışı tam olarak tanımlar.

**Radyoaktif Maddelerin Azalması:**

Bazı maddeler zamanla kendiliğinden bozulur. Her beş yılda bir, kütlesinin yarısı yok olur. Bu azalma doğrusal değildir; her seferinde kalan miktarın yarısı kaybolur. Fizikte buna yarı ömür denir ve bu süreç üstel azalma formülüyle açıklanır.

Kahvenin Soğuması:

Yeni yapılan sıcak kahve, ilk dakikalarda çok hızlı soğur, sonra yavaş yavaş oda sıcaklığına yaklaşır. Bu da bir üstel azalış örneğidir. Isı farkı ne kadar fazlaysa, soğuma o kadar hızlı gerçekleşir.



Teknolojinin Yayılması: Yeni bir sosyal medya uygulaması çıktığında, önce birkaç kişi dener. Sonra onlar arkadaşlarına anlatır, onlar da başkalarına... Bir hafta içinde milyonlarca kişiye ulaşır. Kullanıcı sayısındaki bu hızlı artış da üstel bir büyümedir.

Hastalıkların Yayılması: Bir virüsün bulaşma oranı yüksekse, enfekte kişi sayısı her gün katlanarak artabilir. Pandemilerdeki “başta az ama sonra çok hızlı artış” grafiği, tam olarak üstel fonksiyonun grafiğine benzer.



Telefon Bataryasının Bitişi: Bataryalar zamanla enerji kaybeder ama bu kayıp sabit bir miktarda değil, orana göre olur. Bu yüzden şarjınız ilk başta yavaş azalırken, %30'un altına indiğinde çok daha hızlı tükeniyormuş gibi görünür. Bu da üstel azalışın günlük hayattaki bir başka örneğidir.

Matematikte öğrendiğimiz üstel fonksiyonlar sadece formüllerden ibaret değildir; doğanın büyümesini, enerjinin tükenişini, teknolojinin yayılışını, hatta zamanın etkisini anlamamızı sağlar. Yani bu konu, “gerçek hayatın dili”ni okumayı bize öğretir.

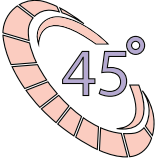
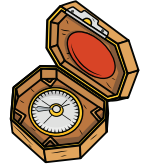


Tanıtım

Tema: Nicelikler ve Değişimler**Konu:** Trigonometrik Fonksiyonlar**Alt Konu:** Trigonometride Temel Kavramlar**Temanın Amacı:** Bu Temada, Öğrencilerin Trigonometrik Referans Fonksiyonları ile Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Nitel Özellikleri ve Trigonometrik Denklem İçeren Problemlerin Çözülebilmesi**Anahtar Kavramlar:** Nitel Özellikler, Trigonometrik Fonksiyonlar, Trigonometrik Denklemler

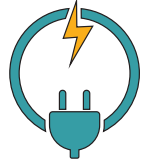
Köprü Kurma

Trigonometrinin tarihsel gelişimi, aslında insanlığın ihtiyaçlarının bir yansımasıdır. Antik denizciler yön bulmak, mimarlar tapınakları doğru açıyla inşa etmek, astronomlar yıldızların konumlarını belirlemek için trigonometrinin temellerini attılar. Bugün sınıfta öğreneceğiniz her kavram, geçmişte bir problemi çözmek için geliştirilmiş bir araçtır ve halen aynı şekilde kullanılmaktadır.



10. sınıfta edindiğiniz temel bilgiler şimdi daha geniş bir dünyanın anahtarı hâline geliyor. Örneğin yönlü açı, fizikçiler için bir cismin dönme yönünü belirlemede; mühendisler için robot kollarının hareket açısını hesaplamada hayati önem taşır. Açı ölçü birimleri ise mühendislikte iki farklı dili konuşmak gibidir: Derece daha çok günlük işleri, radyan ise bilimsel hesaplamaları temsil eder. Radyan olmadan sinyallerin frekansı, sarkaçların salınımı, motorların devir hızları ya da dalgaların yayılımı doğru modellenemez.

Birim çember, bu ünitenin kalbi olup bugün kullandığımız birçok teknolojinin görünmez kahramanıdır. 3D animasyonlarda karakterlerin dönüş hareketleri, uydu sistemlerinin yörünge hesaplamaları, elektrik mühendisliğinde alternatif akımın sinüs dalgası tamamen birim çember mantığıyla oluşturulur. Bir noktayı çember üzerinde döndürmek, aslında bir görüntüyü ekranda döndürmek veya bir robotun kolunu konumlandırmakla aynı matematiksel süreçtir.



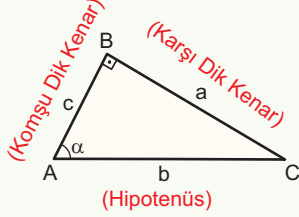
Esas ölçü ise karmaşık görünen açıları en sade hâline indirerek hesaplamaları kolaylaştırır. Bu sadeleştirme, yapay zekâ algoritmalarından simülasyon programlarına kadar birçok gelişmiş yazılımda hata payını azaltmak için kullanılır. Çünkü bilgisayarlar da tıpkı bizler gibi "açının özünü" bilmek ister.

Kısacası, bu ünitedeki her başlık, sizi sadece sınavlara değil; mühendislikten fiziğe, mimarlıktan bilgisayar grafiğine, tıptan uzay bilimine kadar uzanan geniş bir dünyanın matematiksel diline hazırlıyor. Trigonometrinin her yeni kavramı, modern hayatın görünmez bir köprüsüdür ve bu köprüyü geçtikçe bilimin nasıl çalıştığını çok daha net göreceksiniz.



- Şimdi trigonometri temasının bu seneki kısmına katkıda bulunacak 9. ve 10. sınıfta öğrendiğimiz bazı bilgileri hatırlayalım.

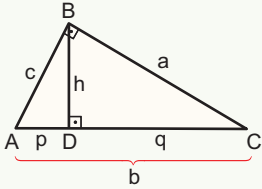
Bilmeden Olmaz



Pisagor Teoremi:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Bilmeden Olmaz



Öklid Teoremi:

$$1. h^2 = p \cdot q$$

$$2. a^2 = q \cdot b$$

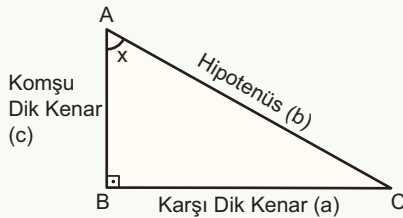
$$c^2 = p \cdot b$$

Bilmeden Olmaz

Pisagor Üçlülere



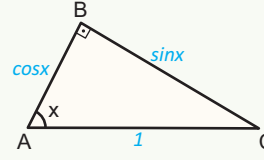
Bilmeden Olmaz



$$\sin \alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{a}{b} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Komsu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komsu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{a}{c} \quad \cot \alpha = \frac{\text{Komsu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

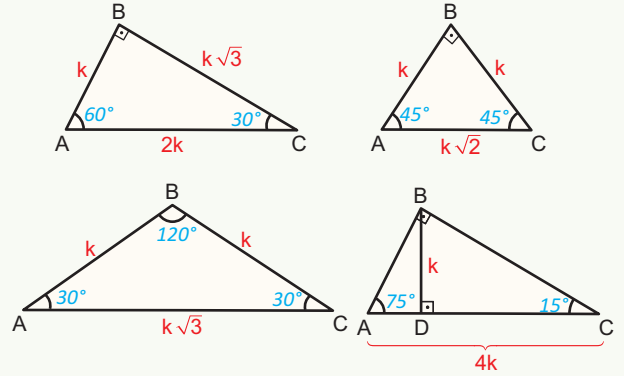
Bilmeden Olmaz



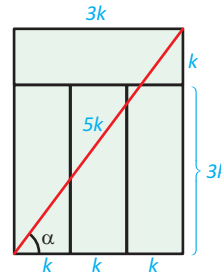
$$\begin{aligned} &|AB| = \cos x \quad |BC| = \sin x \\ &\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ &\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ &\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \\ &\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ &\tan x \cdot \cot x = 1 \end{aligned}$$

Bilmeden Olmaz

Özel Açılı Dik Üçgenler



Örnek 1



Yandaki şekil dört eş dikdörtgenden oluşmuştur.

Buna göre, şekilde gösterilen α açısı için $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ çarpımının sonucu kaçtır?

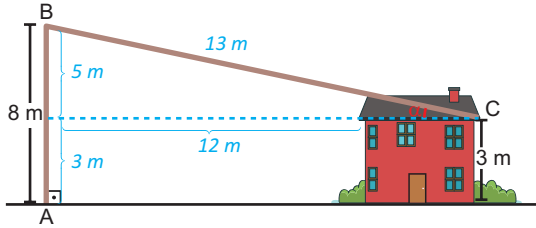
- A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{6}{25}$ C) $\frac{9}{25}$ D) $\frac{12}{25}$ E) $\frac{3}{5}$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \text{ bulunur.}$$

Cevap D

Örnek 2

Zemin üzerindeki A noktasında yere dik durumlu olan 21 metre uzunluğundaki direk çıkan fırtınanın etkisiyle B noktasından kırılmış ve direğin C ucu binanın çatısında kalmıştır.



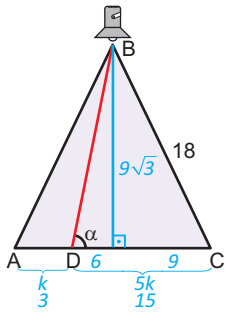
Buna göre, çatının üstünde α ile gösterilen açının tanjantını kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{2}{3}$

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

Cevap B

Örnek 3



Yandaki şekilde eşkenar üçgen şeklinde ışık saçan bir sahne ışığı gösterilmiştir.

$$|CD| = 5 \cdot |AD|, |BC| = 18 \text{ birim}, m(\widehat{BDC}) = \alpha$$

Yukarıda verilenlere göre, $\tan \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$6k = 18 \Rightarrow k = 3$$

$$\tan \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Cevap E

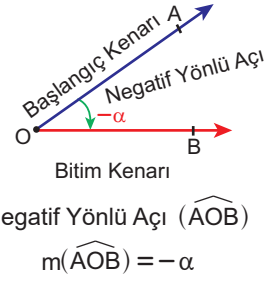
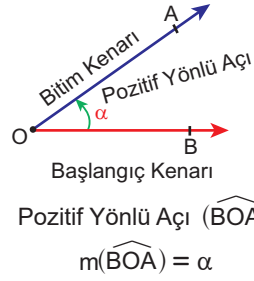
Yönlü Aç

Tanım

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından birisi başlangıç kenarı, diğeri bitim kenarı olarak alındığında oluşan açıya **yönlü açı** denir.

Önemli

Saatin dönme yönünde olan açılar **negatif yönlü**, saatin dönme yönünün tersinde olan açılar **pozitif yönlü** açılardır.



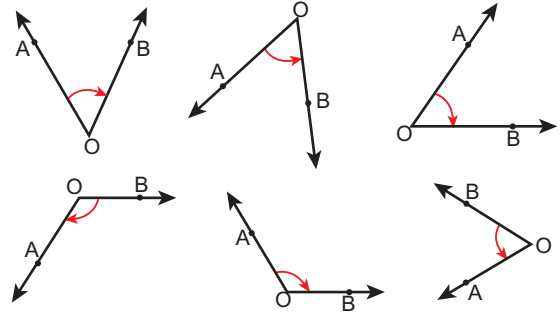
Örneğin

Gemiler, uçaklar ve drone'lar yönlerini belirlerken yönlü açılar kullanılır.

- Saat yönünün tersi → pozitif dönüş
- Saat yönü → negatif dönüş

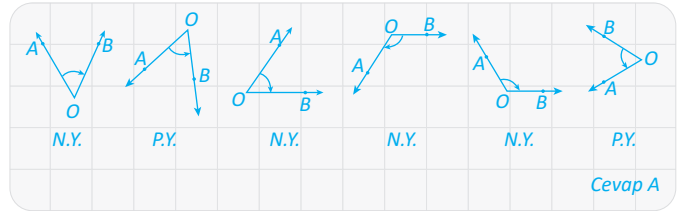
GPS rotası, drone yaw açısı, uçakların sensörleri temelde yönlü açı kavramını kullanır.

Örnek 4



Yukarıda verilen yönlü açılardan kaç tanesi pozitif yönlüdür?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



Açı Ölçü Birimleri

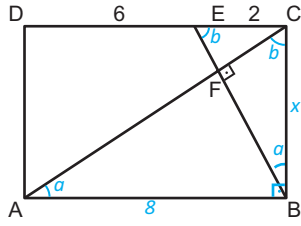
Açı ölçüsü olarak iki açı türünü alacağız. Bunlar derece ve radyan açı türleri.

Derece:

Derece, bir açının büyüklüğünü ölçmek için kullanılan en temel ve en yaygın açı ölçü birimidir. Bir ışının uç noktası etrafında tam bir dönüş yapması 360 derece olarak tanımlanır. Bu nedenle derece, açının ölçüm miktarlarını 0° ile 360° arasında veya daha büyük değerler ya da negatif değerlerle ifade eden bir ölçü sistemidir.



Örnek 7



ABCD dikdörtgen, $[AC] \perp [EB]$, $|DE| = 6$ cm ve $|EC| = 2$ cm olduğuna göre, **A(ABCD) kaç cm^2 dir?**

- A) 24 B) 30 C) 32 D) 36 E) 40

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{BCE}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

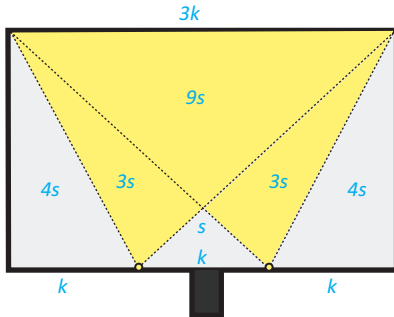
$$8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$$

Cevap C



Çıkış Soru 3

Dikdörtgen biçimindeki bir reklam panosunun alt kenarında bu kenarı üç eş parçaya bölecek şekilde iki nokta belirleniyor ve bu noktalara birer aydınlatma lambası yerleştiriliyor. Her bir lamba, açıkken, pano üzerinde şekildeki gibi, bir köşesi lambanın bulunduğu nokta diğer iki köşesi panonun üst kenarının uç noktaları olan üçgensel bölgeyi aydınlatıyor.



Buna göre, reklam panosunun, yalnızca bir lamba açıkken aydınlatılmayan kısmının alanı her iki lamba da açıkken aydınlatılmayan kısmının alanının kaç katına eşittir?

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{8}{7}$

TYT 2025

1. durumda dikdörtgenin alanının yarısı kadar bölge aydınlanmaz. (12s)

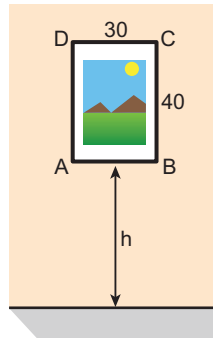
2. durumda 9s aydınlanmaz.

$$\frac{12s}{9s} = \frac{4}{3}$$

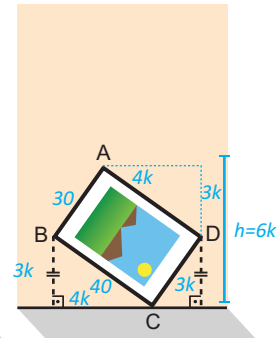
Cevap A



Çıkış Soru 4



Şekil 1



Şekil 2

Kenar uzunlukları 30 ve 40 birim olan dikdörtgen şeklindeki bir çerçeve dört köşesine çivi çakılarak AB kenarı yere paralel ve yerden yüksekliği h birim olacak biçimde Şekil 1'deki gibi duvara asılıyor.

Sonra, A köşesindeki çivi hariç diğer çiviler gevşeyip düşüyor ve A köşesi etrafında dönen çerçeve C köşesi yere değdiğinde Şekil 2'deki gibi tüm köşeleri duvara değecek biçimde dengede kalıyor.

Bu denge durumunda B ve D köşelerinin yerden yükseklikleri birbirine eşit olduğuna göre, h kaç birimdir?

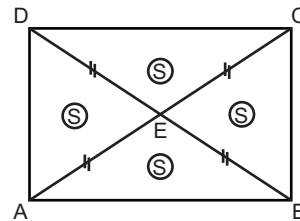
- A) 42 B) 48 C) 54 D) 60 E) 64

TYT 2020

$$\text{Benzerlik oranı} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

$$(3 - 4 - 5) \quad 5k = 40 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow h = 6k \Rightarrow h = 48 \text{ cm}$$

Cevap B



Dikdörtgen köşegenleri eşit uzunluktadır. E köşegenlerin kesim noktası olmak üzere

$$|AE| = |EC| = |BE| = |DE| \text{ olur.}$$

Dikdörtgen eşit alanlı dört üçgene ayrılır.

5. FÖY

1. İstatistiksel Araştırma Problemi Oluşturma
İstatistiksel bir süreç, rastgeleliğin olduğu ve veri toplanarak cevaplanabilen bir soruyla başlar. 11. sınıf müfredatı özellikle iki nicel (sayısal) değişken arasındaki ilişkiyi incelemeye odaklanır.

• **Ölçütler:** Bir araştırma sorusu; açık uçlu olmalı, belirli bir gruba hitap etmeli, nicel veri toplamaya uygun olmalı ve bir amaca hizmet etmelidir.

• **Örnek:** "Bir ildeki hava sıcaklığı ile dondurma satışları arasında bir ilişki var mı?" sorusu iki nicel değişkenli istatistiksel bir sorudur.

2. Veri Toplama ve Görselleştirme (Serpme Diyagramı)

Toplanan verilerin analiz edilebilmesi için önce uygun bir tabloya, ardından görsel bir grafiğe aktarılması gerekir.

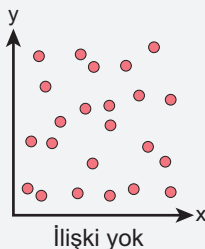
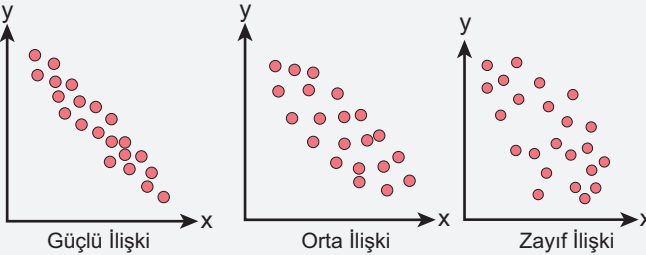
• **Serpme Diyagramı (Saçılım Grafiği):** İki nicel değişken arasındaki ilişkinin varlığını, yönünü ve biçimini belirlemek için kullanılan en temel araçtır. Veri çiftleri (x, y) şeklinde koordinat düzlemine işaretlenir.

• **Gözlem:** Noktaların bir doğru boyunca dizilmesi güçlü bir ilişkiyi, darmadağın durması ise ilişkisizliği gösterir.

Pozitif İlişki



Negatif İlişki



5. FÖY

3. İki Değişken Arasındaki İlişki:

Serpme diyagramında gördüğümüz eğilimin matematiksel ve kavramsal karşılığına korelasyon denir.

• İlişkinin Yönü:

• **Pozitif Korelasyon:** Değişkenler aynı yönde hareket eder. Biri artarken diğeri de artar (Örn: Ders çalışma süresi arttıkça sınav notunun artması).

• **Negatif Korelasyon:** Değişkenler ters yönde hareket eder. Biri artarken diğeri azalır (Örn: Araç hızı arttıkça varış süresinin kısalması).

• **İlişkinin Gücü (Korelasyon Katsayısı):**

• İlişkinin derecesi -1 ile +1 arasındaki bir sayı ile ifade edilir.

• +1: Tam pozitif ilişki.

• -1: Tam negatif ilişki.

• 0: İlişki yok.

• Sayısal değer 1'e yaklaştıkça ilişki "güçlü", 0'a yaklaştıkça "zayıf" kabul edilir.

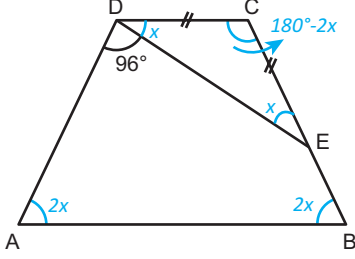
İlişkinin Yönü	Negatif Yönlü	Pozitif Yönlü
İlişkinin Gücü		
Mükemmel İlişki	-1	1
Güçlü İlişki	$-1 < r \leq -0,30$	$0,70 \leq r < 1$
Orta İlişki	$-0,70 < r \leq -0,30$	$0,30 \leq r < 0,70$
Zayıf İlişki	$-0,30 < r < 0$	$0 < r < 0,30$
İlişki Yok	0	0

4. Eleştirel Değerlendirme ve Yanılgılar Kitabın en önemli vurgularından biri, başkaları tarafından sunulan istatistiksel bilgileri (haberler, reklamlar, raporlar) sorgulamaktır.

• **Korelasyon Nedensellik:** İki değişken arasında güçlü bir ilişki olması, mutlaka birinin diğeri için sebebi olduğu anlamına gelmez. (Örn: Boyu uzun olanların kilosu da genelde fazladır ama boy uzunluğu kilonun tek sebebi değildir).

• **Yanıltıcı Görseller:** Ölçekleri yanlış ayarlanmış grafikler veya yanlış seçilmiş örneklem kuyucuyu aldatabilir. İyi bir istatistik okuyazarı, verinin kaynağını ve analiz yöntemini mutlaka sorgulamalıdır.

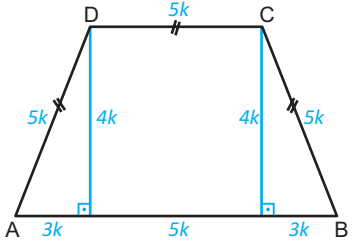
1.



ABCD ikizkenar yamuk, $[AB] \parallel [CD]$, $|AD| = |BC|$, $|DC| = |CE|$ ve $m(\widehat{ADE}) = 96^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ 'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} 2x + 96^\circ + x &= 180^\circ \\ 3x &= 84^\circ \Rightarrow x = 28^\circ \\ 2x &= 56^\circ \text{ olur.} \end{aligned}$$

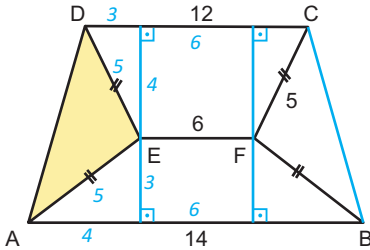
2.



ABCD yamuk, $[AB] \parallel [CD]$, $|AD| = |DC| = |BC|$, $\tan(\widehat{A}) = \frac{4}{3}$ ve $\text{Ç}(ABCD) = 52$ birim olduğuna göre $|AB|$ 'nin kaç birim olduğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} 26k &= 52 \Rightarrow k = 2 \\ |AB| &= 11k = 22 \text{ birim olur.} \end{aligned}$$

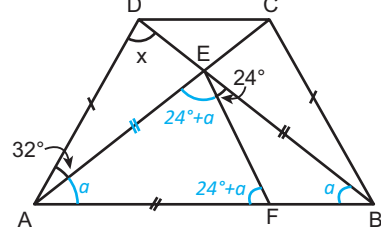
3.



ABFE ve EFCD ikizkenar yamuklar, $[AB] \parallel [EF] \parallel [CD]$, $|AE| = |BF| = |CF| = |DE| = 5$ cm, $|AB| = 14$ cm, $|EF| = 6$ cm ve $|DC| = 12$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ADE})$ yi bulunuz.

$$\begin{aligned} A(ABFE) &= \frac{(14+6)}{2} \cdot 3 = 30 \text{ cm}^2 \\ A(EFCD) &= \frac{(12+6)}{2} \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2 \\ A(ABCD) &= \frac{(14+12)}{2} \cdot 7 = 91 \text{ cm}^2 \\ 91 - 36 - 30 &= \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

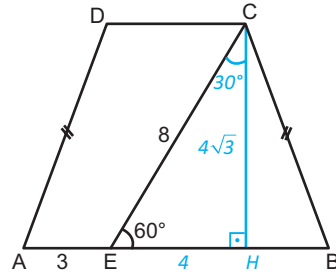
4.



ABCD ikizkenar yamuk, $|AD| = |BC|$, $[AC] \cap [BD] = \{E\}$, $|EB| = |AF|$, $m(\widehat{FEB}) = 24^\circ$ ve $m(\widehat{DAC}) = 32^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ADB}) = x$ kaç derecedir?

$$\begin{aligned} 24^\circ + a + 24^\circ + a + a &= 180^\circ \\ 3a &= 132^\circ \\ a &= 44^\circ \\ ABD \text{ üçgeninde } 76^\circ + 44^\circ + x &= 180^\circ \\ x &= 60^\circ \end{aligned}$$

5.



ABCD ikizkenar yamuk, $|AD| = |BC|$, $m(\widehat{BEC}) = 60^\circ$, $|CE| = 8$ cm, $|AE| = 3$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$ 'nin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 7 \cdot 4\sqrt{3} \\ &= 28\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Açık Uçlu Sorular Cevap Anahtarı

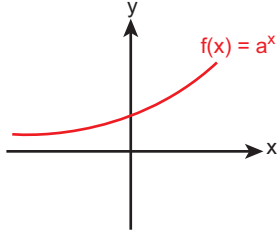
1. 56 2. 22 birim 3. 12,5 cm 4. 60° 5. $28\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Üstel Fonksiyon Grafikleri

$f(x) = a^x$ referans üstel fonksiyonunda

• $a > 1$ için $f(x) = a^x$

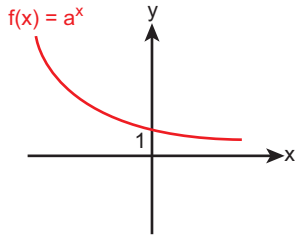
x	$-\infty$	-1	0	1	2	∞
f(x)	0	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	∞



Verilen değerlere karşılık grafik oluşturulduğunda daima artan pozitif değerlere sahip bir grafik oluşur. Geometrik olarak bu üstel fonksiyon grafiği her zaman x ekseninin üzerinde yer alır.

• $0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	∞
f(x)	0	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	∞



Verilen değerlere karşılık grafik oluşturulduğunda daima azalan pozitif değerlere sahip bir grafik oluşur. Geometrik olarak bu üstel fonksiyon grafiği her zaman x ekseninin üzerinde yer alır.

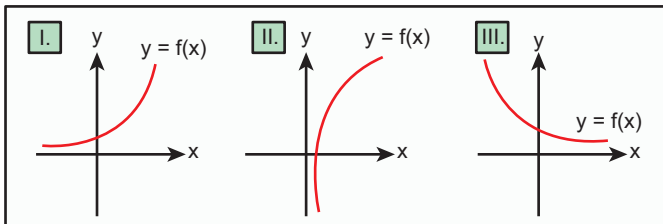


Örnek 6

Aşağıdaki dik koordinat düzleminde

$y = f(x)$, $y = g(x)$ ve $y = h(x)$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Yukarıda verilen fonksiyon grafiklerinden hangileri üstel fonksiyon grafiğidir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) II ve III

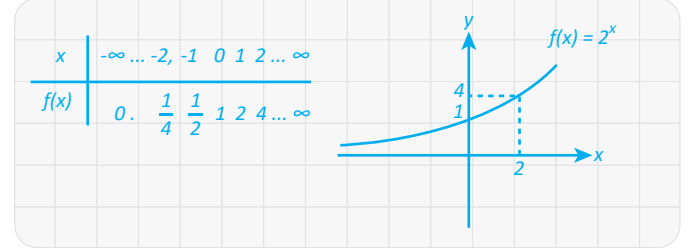
I artan üstel fonksiyon, III azalan üstel fonksiyon grafiğidir.

Cevap D



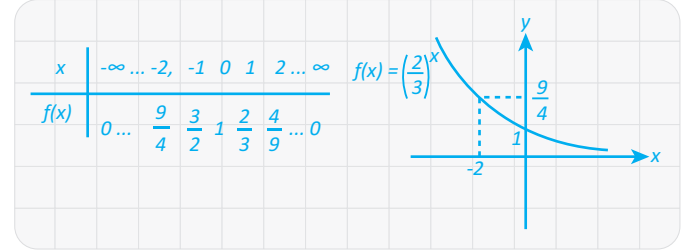
Örnek 7

$f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek 8

$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek 9

Aşağıda $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı üstel fonksiyonların artanlık ve azalanlık durumlarını inceleyiniz.

a) $f(x) = (\sqrt{2})^{6x-4}$

$\sqrt{2} > 1$ artandır.

b) $g(x) = 3^{6-x}$

$\frac{3^6}{3^x} = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ olup azalandır.

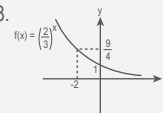
c) $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{6x+4}$

$\frac{3}{4} < 1$ olup azalandır.



Cevap Anahtarı

1. a) Fonksiyondur., b) Fonksiyon değildir., c) Fonksiyondur.
2. C 3. C 4. a) $f(n) = 20 \cdot (1,8)^{n-1}$ b) $f(6) = 20 \cdot (1,8)^5 \approx 378$
5. D 6. D 7.



- 9.a) Artandır,
b) Azalandır.
c) Azalandır.

BİLEŞKE FONKSİYON

Bileşke Fonksiyonlara Daha Basit Bir Bakış

Matematiksel düşüncenin gelişiminde "fonksiyon" fikri, bir girdiyi belirli bir kuralla çıktıya dönüştürme anlayışına dayanır. Örneğin bir sayıyı ikiyle çarpmak veya bir derece ölçüsünü santigrata çevirmek gibi işlemler fonksiyonlara örnektir. Günlük hayattaki sistemler ise çoğu zaman yalnızca tek bir işlemden oluşmaz. Doğada veya teknoloji dünyasında, bir sürecin çıktısı başka bir sürecin girdisi olabilir. İşte tam bu durumda bileşke fonksiyon karşımıza çıkar. Bileşke fonksiyon, kısaca $f(g(x))$ şeklinde gösterilen, "bir işlemden çıkan sonucun başka bir işlemin içine girmesi" anlamına gelir. Yani süreçler bir zincir gibi birbirine bağlanır.

Bunu günlük hayatla bağlamak gerekirse:

Bir roketin itiş gücü önce hızını değiştirir,

Hız ise konumunu belirler.

Ardışık işlemler birbirini tetikler.

Sanayide de benzer durumlar vardır. Örneğin; ham petrol önce rafineriye girer, ara ürünlere ayrılır, bu ürünler daha sonra başka işlemlere girerek plastik, yakıt gibi maddelere dönüşür. Her aşama, bir öncekinin sonucunu alır ve yeni bir sonuç üretir.

Sonuç olarak; bileşke fonksiyon sadece matematiksel bir gösterim değildir. Doğanın işleyişinden teknolojik sistemlere kadar birçok yapıyı anlamamızda önemli bir rol oynar. Bu nedenle modern bilim, mühendislik ve ekonomide bileşke fonksiyon düşüncesi büyük yer tutar.

Ekonomi ve Finansal Piyasaların Bileşke Yapısı

Ekonomi aslında büyük bir fonksiyon zinciri gibidir. Bir kararın sonucu, başka bir kararı etkiler. İnsanların harcamalarından devletin faiz kararlarına kadar her şey birbirine bağlıdır. Bu nedenle ekonomideki değişimler, tek bir etkenle değil, birçok adımın birleşmesiyle oluşur.

1. Ekonomide Bileşke Fonksiyon Mantığı

$f(x)$ = Enflasyon = fiyatların zamanla artması

$g(x)$ = Satın alma gücü = maaşın fiyatlara yetip yetmediği

Fiyatlar birçok nedenden yükselir. Merkez Bankası, fiyat artışını kontrol etmeye çalışır. Yani ekonomideki her değişim, önceki bir değişimin sonucudur; bu yüzden ekonomi tıpkı bileşke fonksiyonlarda olduğu gibi, birbirine bağlı süreçlerin arka arkaya işlemesiyle ortaya çıkar.

2. Döviz İşlemleri ve Bileşke Fonksiyon

Bir para birimini başka bir para birimine dönüştürmek, arka arkaya uygulanan işlemlerden oluştuğu için tıpkı matematikteki bileşke fonksiyon mantığına benzer.

$f(x)$: TL'yi Doları çevirmek.

$g(x)$: Doları Euroya çevirmek.

$g \circ f$: TL'yi Euroya çevirmek.

Mühendislikte Dinamik Sistemler ve Fiziksel Gerçeklik

Fiziksel dünya, değişkenlerin izole olmadığı, birbirine sıkı sıkıya bağlı olduğu bir yapıdır. Mühendislik, bu bağlı değişkenleri yönetme ve optimize etme sanatıdır.

1. Kinematik – Bağlı Oranlar ve Bileşke Fonksiyon İlişkisi

Bir sistemdeki bazı değişimler doğrudan ölçülemez ama başka değişkenlere bağlı olduğu için dolaylı olarak hesaplanabilir.

Örneğin bir tankın hacmi, onun yarıçapına bağlıdır. Yarıçap ise zamana bağlı olarak değişir. Yani aslında

hacim $\rightarrow$ yarıçap $\rightarrow$ zaman

şeklinde bir zincir vardır.

Bu zincir "bileşke fonksiyon" mantığına benzer: Hacim, yarıçapa bağlı; yarıçap da zamana bağlıdır. O halde hacim dolaylı olarak zamana bağlı olur.

Bunu şöyle düşünebilirsiniz:

Zaman değişir $\rightarrow$ balonun yarıçapı büyür $\rightarrow$ balonun hacmi artar.

Bu işlemler üst üste uygulandığı için bileşke fonksiyon oluşur.

2. Kontrol Sistemleri ve Bileşke Fonksiyon İlişkisi

Kontrol mühendisliğinde sistemler genellikle birden fazla işlem adımıyla oluşur. Her adım, girdiyi işleyip bir çıktı üreten bir "blok" gibi düşünülebilir. Bir bloktan çıkan sonuç, diğer bloğun girdisi olur.

Yani sistem şu şekilde çalışır:

Girdi $\rightarrow$ Sistem 1 $\rightarrow$ Sistem 2 $\rightarrow$ Çıktı

Bu yapı aslında tam olarak bileşke fonksiyon mantığıdır. Çünkü: birinci sistemin çıktısı, ikinci sistemin girdisi olur.

Matematikteki $g(f(x))$ ifadesinin, kontrol sistemindeki karşılığı tam olarak budur.

Biyolojik Bilimler, Kimya ve Ekolojide Dinamik Modelleme

Canlı sistemler ve kimyasal reaksiyonlar, lineer olmayan tepkiler ve eşik değerleri ile doludur. Bu sistemleri modellemek, farklı zaman ölçeklerinde çalışan süreçlerin bileşkesini almayı gerektirir.

1. Bakteri Artışı, Sıcaklık ve Bileşke Fonksiyon

Bakterilerin çoğalma hızı sıcaklığa bağlıdır. Yani ortam sıcaklığı artarsa bakteriler daha hızlı çoğalır.

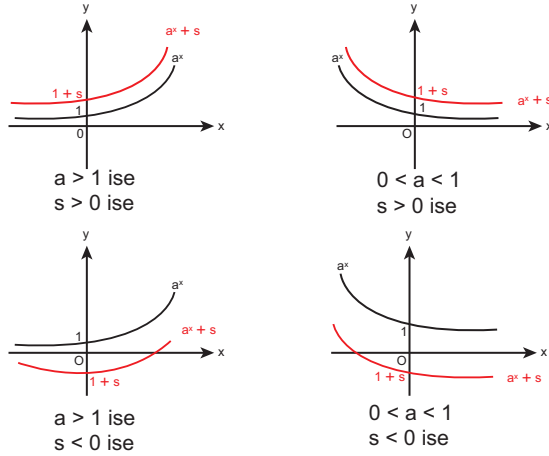
Soğuk zincir (örneğin süt, et, tavuk taşınırken), sıcaklık gün boyunca sabit kalmaz, zamanla değişir. Bu yüzden bakterilerin çoğalma hızı da zamanla birlikte değişmiş olur.

Bu durum şöyle bir zincir oluşturur:

zaman $\rightarrow$ sıcaklık $\rightarrow$ çoğalma hızı

y = k . f(x ± r) ± s Üstel Fonksiyonunun İncelemesi

- y = k . f(x ± r) fonksiyonuna eklenen s değeri fonksiyonu y eksenini üzerinde s birim hareket ettirir.



- y = k . f(x ± r) ± s üstel fonksiyonu f(x) = a^x referans üstel fonksiyonunun grafiğine

1. adım: a^{x±r}
2. adım: k . a^{x±r}
3. adım: k . a^{x±r} ± s

işlemleri ile elde edilir. x ± r grafiği sağa/sola ötelerken, k ile çarpma grafiği artırıp / azaltabilir, ± s grafiği yukarı/aşağı öteler.

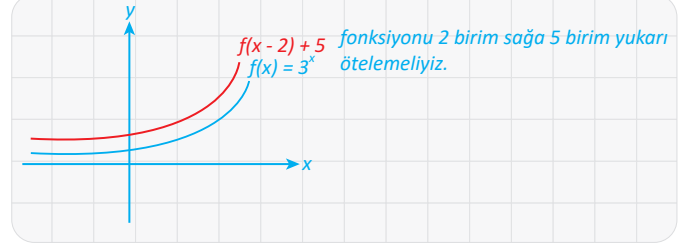
Örnek 7

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Fonksiyonun cebirsel temsili	k, r ve s değeri	f(x) = a ^x üstel fonksiyonuna uygulanan dönüşüm
f(x) = 3 ^x + 7	k=1, r=0, s=7	y eksenini boyunca 7 birim yukarı ötelenir.
g(x) = -2 ^x + 2	k=-1, r=0, s=2	x eksenine göre simetrisi alınıp y eksenini boyunca 2 birim yukarı ötelenir.
f(x) = -2 . 5 ^x + 1	k=-2, r=0, s=1	x eksenine göre simetrisi alınıp aldığı değerler 2 katına çıkarılır. y eksenini boyunca 1 birim yukarı ötelenir.
k(x) = -7 ^{x-2}	k=-1, r=-2, s=-3	x eksenine göre simetrisi alınıp x eksenini boyunca 2 birim sola ötelenir.
h(x) = 4 ^{x-1} - 3	k=1, r=-1, s=-3	x eksenine göre simetrisi alınıp x eksenini boyunca 1 birim sağa ötelenir. y eksenini boyunca 3 birim aşağı ötelenir.
g(x) = 10 ^{x+1} + 4	k=1, r=1, s=4	x eksenini boyunca 1 birim sola, y eksenini boyunca 4 birim yukarı ötelenir.

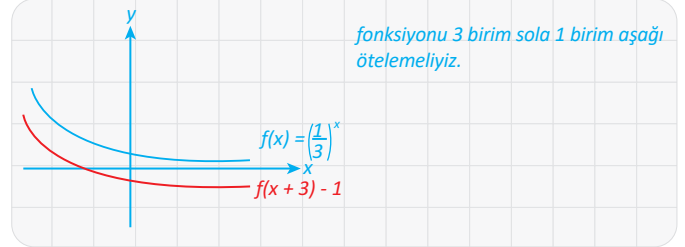
Örnek 8

f(x) = 3^x olduğuna göre f(x - 2) + 5 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek 9

f(x) = (1/3)^x olduğuna göre f(x + 3) - 1 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Not

- f: A → B, y = f(x) fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon olsun.
- f⁻¹: B → A, x = f⁻¹(y) şeklinde tanımlanan f⁻¹ fonksiyonuna **f fonksiyonunun tersi** denir.

Logaritma Fonksiyonu

- f: R → R⁺, f(x) = a^x, a ∈ R⁺ ve a ≠ 1 üstel fonksiyonunun tersi olan f⁻¹ fonksiyonuna **tabanı a olan logaritma fonksiyonu** denir ve f⁻¹: R⁺ → R olmak üzere f⁻¹(x) = y = log_ax biçiminde yazılır. Bu ifade "logaritma a tabanına x" şeklinde okunur. a ∈ R⁺, a ≠ 1 ve x > 0 için y = log_ax ⇔ a = a^y

Örnek 10

5^x = 3 olduğuna göre x'in değerini bulunuz.

$$5^x = 3 \text{ ise } x = \log_5 3 \text{ tür.}$$

Örnek 11

2^{x+2} = 7 olduğuna göre x'in değerini bulunuz.

$$2^{x+2} = 7 \quad 2^x = \frac{7}{4} \quad x = \log_2 \frac{7}{4}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Referans Trigonometrik Fonksiyonlarına Simetri Ve Öteleme Dönüşümlerinin Uygulanması İle Elde Edilen Yeni Trigonometrik Fonksiyonların Nitel Özellikleri



Not

Bir $f(x)$ referans trigonometrik fonksiyonunun grafik temsilini x ekseninde pozitif yönde a birim ötelesek $f(x - a)$ fonksiyonun, x ekseninde negatif yönde a birim ötelesek $f(x + a)$ fonksiyonun grafik temsilini elde ederiz.



Örneğin

Aşağıda x ekseninde ötelemeler verilmiştir.

- $f(x) = \sin x$ fonksiyonun grafiği x ekseninde pozitif yönde 2 birim ötelenirse $g(x) = \sin(x - 2)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.
- $f(x) = \cos x$ fonksiyonun grafiği x ekseninde negatif yönde 1 birim ötelenirse $g(x) = \cos(x + 1)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.
- $f(x) = \tan x$ fonksiyonun grafiği x ekseninde negatif yönde 3 birim ötelenirse $g(x) = \tan(x + 3)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.



Not

Bir $f(x)$ referans trigonometrik fonksiyonunun grafik temsili y ekseninde pozitif yönde a birim ötelesek $f(x) + a$ fonksiyonun, y ekseninde negatif yönde a birim ötelesek $f(x) - a$ fonksiyonun grafik temsili elde ederiz.



Örneğin

- $f(x) = \cot x$ fonksiyonun grafiği y ekseninde pozitif yönde 3 birim ötelenirse $g(x) = \cot x + 3$ fonksiyonun grafiği elde edilir.
- $f(x) = \sec x$ fonksiyonun grafiği y ekseninde negatif yönde 2 birim ötelenirse $g(x) = \sec x - 2$ fonksiyonun grafiği elde edilir.



Örneğin

$f(x) = \sin x$ fonksiyonun grafiği x ekseninde pozitif yönde 1 birim ve y ekseninde negatif yönde 2 birim ötelenirse $g(x) = \sin(x - 1) - 2$ fonksiyonun grafiği elde edilir.



Not

- Bir $f(x)$ referans fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınırsa $-f(x)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.
- Bir $f(x)$ referans fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alınırsa $f(-x)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.



Örneğin

$f(x) = \cos x$ fonksiyonun grafiğinin x eksenine göre simetriği alıp y ekseninde pozitif yönde 1 birim ötelenirse $g(x) = -\cos x + 1$ fonksiyonun grafiği elde edilir.



Not

Bir $f(x)$ referans fonksiyonu $c \in \mathbb{R}$ ile çarpılırsa düşeyde uzatma ya da sıkıştırma yapılır.



Örneğin

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini düşeyde 2 katına çıkarırsak $g(x) = 2 \cdot \tan x$ fonksiyonunun grafiği veya düşeyde $\frac{1}{3}$ oranında sıkıştırılırsa $h(x) = \frac{1}{3} \cdot \tan x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Not

Bir $f(x)$ referans fonksiyonunda $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = f(c \cdot x)$ şeklinde elde edilen fonksiyon $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin yatayda uzatılması veya sıkıştırılması elde edilir.

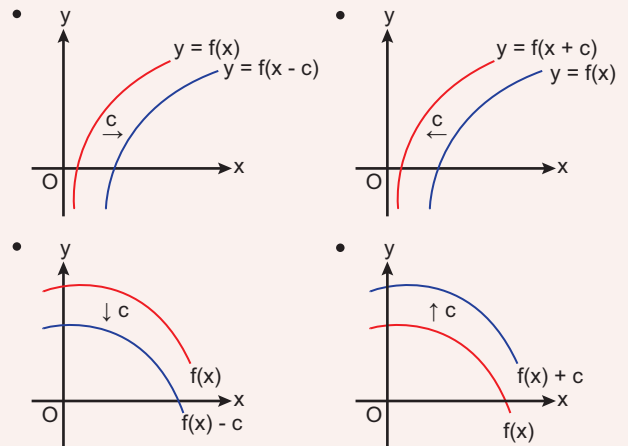


Örneğin

$f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiğini yatayda 2 birim sıkıştırırsak $g(x) = \cot(2x)$ fonksiyonunun grafiği 3 katına çıkarırsak $h(x) = \cot\left(\frac{x}{3}\right)$ fonksiyonun grafiği elde edilir.

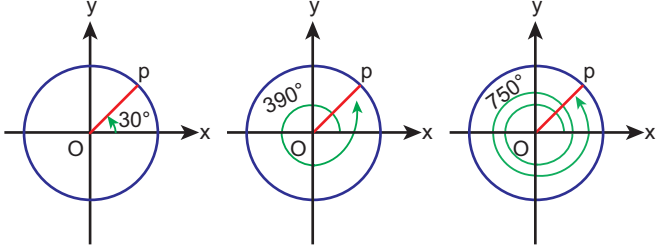


Önemli



Esas Ölçü

Ölçüsü 360° den veya 2π 'den büyük olan açılar dik koordinat sisteminde başlangıç noktasından geçerler.



$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \quad 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 750^\circ$$



Önemli

k bir tam sayı olmak üzere,

$0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ iken $\alpha^\circ + 360^\circ \cdot k$ açısının esas ölçüsü α° dir.



Not

360° den büyük açılar 360° 'a bölümünden kalan esas ölçüdür.



Örneğin

900° 'nin esas ölçüsünü bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 900 & 360 \\ - 720 & 2 \\ \hline 180 & \end{array} \Rightarrow 900^\circ\text{'nin esas ölçüsü } 180^\circ \text{ dir.}$$



Önemli

k bir tam sayı olmak üzere,

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$ iken $\alpha + 2\pi \cdot k$ açısının esas ölçüsü α radyandır.



Not

a ve b birer sayma sayısı olmak üzere $\frac{a \cdot \pi}{b} > 2\pi$ iken esas ölçüyü bulmak için a değeri $2 \cdot b$ ye bölünür. Elde edilen kalan c olsun.

Bu durumda, $\frac{c \cdot \pi}{b}$ esas ölçüdür.



Örneğin

$\frac{17\pi}{7}$ radyanlık açının esas ölçüsünü bulalım.

17 yi $2 \cdot 7 = 14$ 'e bölelim.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 14 \\ - 14 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow \frac{17\pi}{7} \text{'nin esas ölçüsü } \frac{3\pi}{7} \text{ dir.}$$



Örnek 7

1280° nin esas ölçüsü kaç radyandır?

- A) $\frac{2\pi}{9}$ B) $\frac{7\pi}{9}$ C) $\frac{10\pi}{9}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 1280 & 360 \\ - 1080 & 3 \\ \hline 200 & \end{array} \Rightarrow \text{Esas ölçü} = 200^\circ = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9} \quad \text{Cevap C}$$



Örnek 8

-2000° nin esas ölçüsü kaç derecedir?

- A) 160 B) 170 C) 180 D) 190 E) 200

$$\begin{array}{r|l} -2000 & 360 \\ + 2160 & 6 \\ \hline 160 & \end{array} \Rightarrow \text{Esas ölçü} = 160^\circ \quad \text{Cevap A}$$



Örnek 9

$\frac{70\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç derecedir?

- A) 210 B) 220 C) 230 D) 240 E) 250

$$\begin{array}{r|l} 70 & 6 \\ - 6 & 11 \\ \hline 10 & \\ - 6 & \\ \hline 4 & \end{array} \Rightarrow \text{Esas ölçü} = \frac{4\pi}{3} = \frac{4 \cdot 180}{3} = 240^\circ \quad \text{Cevap D}$$



Örnek 10

$-\frac{19\pi}{4}$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?

- A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) π D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{r|l} -19 & 8 \\ + 24 & 3 \\ \hline 5 & \end{array} \Rightarrow \text{Esas ölçü} = \frac{5\pi}{4} \quad \text{Cevap B}$$